УДК 517.581

Н.О. Вірченко, О.М. Лисецька

НОВІ ІНТЕГРАЛИ З r-УЗАГАЛЬНЕНОЮ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЮ ФУНКЦІЄЮ ГАУССА

Вступ

Гіпергеометричні функції відіграють особливо важливу роль і в теорії спеціальних функцій, і при розв'язанні широкого класу задач різних галузей прикладної математики, фізики тощо. Гіпергеометричні функції були предметом дослідження багатьох математиків протягом більше двох сторіч. Тут треба відзначити праці Гаусса [1], Куммера [2], Рімана [3], Якобі та ін. Новий етап у дослідженні гіпергеометричних функцій пов'язаний з розвитком загальної теорії аналітичних функцій.

Зображення гіпергеометричної функції Гаусса у формі означених інтегралів було предметом цікавих досліджень Ейлера, Гурса, Похгаммера, Вейєрштраса, Шварца, Гобсона, Ватсона та ін.

В останні десятиріччя посилився інтерес до узагальнення гіпергеометричних функцій за Райтом [4, 5], вивчаються та досліджуються окремі випадки, які мають не тільки теоретичне, але й практичне значення [6–10] та ін.

Виникає потреба подальшого дослідження та застосування нових узагальнень гіпергеометричної функції Гаусса.

Постановка задачі

Мета статті – дослідження основних властивостей r-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса, застосування їх до обчислення означених інтегралів, яких немає в наявній науковій та довідковій математичній літературі, розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма I роду з узагальненою приєднаною функцією Лежандра I роду.

r-Узагальнена гіпергеометрична функція Гаусса, основні її властивості

Вивчимо детальніше нове узагальнення гіпергеометричної функції Гаусса, запроваджене в [11]. Деякі властивості функції досліджено в [12].

Розглянемо функцію вигляду [11]:

$$ {}_r\tilde{F}(a,b;c;z) = {}_r\tilde{F}(z) \equiv \frac{1}{\mathrm{B}(b,c-b)} \times $$

$$ \times \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \quad (1) $$

де $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,b > 0$; $r > 0$; $|z| < 1$; $\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$; $\{\tau,\beta\} \subset R$; $\tau > 0$; $\tau - \beta < 1$; $\mathrm{B}(\ldots)$ – бета-функція [13]; ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ – (τ,β)-узагальнена вироджена (конфлюентна) гіпергеометрична функція [9]:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = $$

$$ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\, {}_1\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(c;\tau)\\(c;\beta)\end{matrix}\right| zt^{\tau}\right]dt, \quad (2) $$

де ${}_1\Psi_1(z)$ – частинний випадок узагальненої функції Фокса–Райта [6].

При $\beta = \tau$ функція (1) матиме вигляд

$$ {}_r\tilde{\tilde{F}}(a,b;c;z) = {}_r\tilde{\tilde{F}}(z) \equiv \frac{1}{\mathrm{B}(b,c-b)} \times $$

$$ \times \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\, {}_1\Phi_1^{\tau}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt; \quad (3) $$

тут ${}_1\Phi_1^{\tau}(a;c;z)$ – узагальнена вироджена (конфлюентна) гіпергеометрична функція [9]:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau}(a;b;c) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{zt^{\tau}} dt. \quad (4) $$

Зауважимо, що при $r = 0$ формули (1), (3) дадуть класичну функцію ${}_2F_1(a,b;c;z)$ [13].

Виявилось, що функції (1), (3) знаходять застосування при розв'язанні складніших задач теплопровідності, задач теорії дифузії, у квантовій теорії поля, у теорії стохастичних диференціальних рівнянь, теорії радіації, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії кодування та ін.

Подамо основні властивості функції ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$.

Лема 1 (*інтегральні зображення функції* ${}_r\tilde{F}(z)$). При умовах існування функції ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$ справедливі такі інтегральні зображення:

$$ {}_r\tilde{F}(a,b;c;z) = \frac{2}{\mathrm{B}(b,c-b)} \times $$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\omega)^{2b-1}(\cos\omega)^{2c-2b-1}}{(1-z\sin^2\omega)^a}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{4r}{\sin^2 2\omega}\right)d\omega, \quad (5)$$

$${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)=\frac{2^{b-a}}{\mathrm{B}(b,c-b)}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{(\mathrm{sh}\theta)^{2a-2c+1}(\mathrm{ch}\theta)^{2c-a-b-1}}{\left(\frac{1}{2}-z-\frac{1}{2}\mathrm{ch}\theta\right)^a}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{2r(\mathrm{ch}\,\theta-1)^3}{\mathrm{sh}^4\theta}\right)d\theta, \quad (6)$$

$${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)=\frac{2}{\mathrm{B}(b,c-b)}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{(\mathrm{sh}\theta)^{2b-1}(\mathrm{ch}\theta)^{2a-2c+1}}{(\mathrm{ch}^2\theta-z\,\mathrm{sh}^2\theta)^a}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r\,\mathrm{ch}^4\theta}{\mathrm{sh}^2\theta}\right)d\theta, \quad (7)$$

$${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)=\frac{2^{c-b}}{\mathrm{B}(b,c-b)}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{(\mathrm{sh}\,\theta)^{2b-1}(\mathrm{ch}\,\theta+1)^{a-b-c+1}}{(1+z+(1-z)\,\mathrm{ch}\,\theta)^a}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r(\mathrm{ch}\,\theta+1)^3}{2\,\mathrm{sh}^2\theta}\right)d\theta, \quad (8)$$

$${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)=\frac{1}{\mathrm{B}(b,c-b)}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\left(t^{b-1}(1+t)^{a-c}[1+t(1-z)]^{-a}\times\right.$$

$$\left.\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r(1+t)^2}{t}\right)\right)dt, \quad (9)$$

$${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)=\frac{z^{1-c}}{\mathrm{B}(b,c-b)}\times$$

$$\times\int_0^{z}t^{b-1}(1-t)^{-a}(z-t)^{c-b-1}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{rz^2}{t(z-t)}\right)dt. \quad (10)$$

Для обчислення інтегралів доведення функціональних співвідношень із суміжними узагальненими гіпергеометричними функціями важливу роль відіграють зображення функції ${}_r\tilde{F}(a,b;\ c;z)$ рядами.

Лема 2 (*про зображення функції* ${}_r\tilde{F}(z)$ *рядом*). Якщо $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$, $r>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0$, $\tau-\beta<1$, $\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$, то справедлива формула

$${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{B}(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\,{}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}(b+n,c-b,r)\frac{z^n}{n!}, \quad (11)$$

де $(a)_n$ – символ Похгаммера; ${}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}$ – (τ,β)-узагальнена функція [10]:

$${}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}(x,y;r,\delta;\omega)=$$

$$=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^{\delta}(1-t)^{\omega}}\right)dt; \quad (12)$$

тут $\mathrm{Re}\,x>0$; $\mathrm{Re}\,y>0$; $\delta>0$; $\omega>0$; ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ – функція вигляду (2).

Доведення легко здійснюється, якщо використати зображення (12) для ${}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}$, зображення функції ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(z)$ рядом [10], можливість перестановки операцій інтегрування та сумування.

Наслідок. 1. Зображення функції ${}_r\tilde{F}(z)$ рядами, які встановлюють зв'язок із класичною гіпергеометричною функцією Гаусса ${}_2F_1(a,b;\ c;z)$, з її суміжними функціями від однієї і тієї ж змінної z мають вигляд

$${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)}\times$$

$$\times\,\mathrm{B}(b-n,c-b-n)\frac{(-r)^n}{n!}\,{}_2F_1(a,b-n;c-2n;z), \quad (13)$$

$${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)=$$

$$=A(1-z)^{c-a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)}\mathrm{B}(b-n,c-b-n)\times$$

$$\times\frac{\left(-\frac{z}{1-z}\right)^n}{n!}\,{}_2F_1(c-a-2n,c-b-n;c-2n;z). \quad (14)$$

У формулах (13), (14) і далі: $A = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\mathrm{B}(b,c-b)}$.

2. Зображення функції ${}_r\tilde{F}(z)$ рядами, які встановлюють зв'язок із класичною гіпергеометричною функцією Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$, з її суміжними функціями від змінних $(1-z)$, $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1}{1-z}$, $1-\dfrac{1}{z}$ мають вигляд

$$
{}_r\tilde{F}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma^{-1}(a)}{\mathrm{B}(b,c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(a+k) \times
$$

$$
\times \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(a+k)\, {}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}(b+k, c-a-b-k; r) \frac{(z-1)^k}{k!} +
$$

$$
+ A\Gamma^{-1}(a)(1-z)^{c-a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)} \Gamma(c-b-n) \times
$$

$$
\times \Gamma(a+b-c+n) \left(\frac{r}{z-1}\right)^n \frac{1}{n!} \times
$$

$$
\times {}_2F_1(c-a-2n, c-b-n; 1+c-a-b-n; 1-z), \quad (15)
$$

$$
{}_r\tilde{F}(a,b;c;z) = \frac{(-z)^{-a}\Gamma^{-1}(a)}{\mathrm{B}(b,c-b)} \times
$$

$$
\times \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(a+k) \frac{z^{-k}}{k!}\, {}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}(b-a-k, c-b; r) +
$$

$$
+ A\Gamma^{-1}(a)(-z)^{-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)} \Gamma(b-n)\Gamma(a-b+n) \times
$$

$$
\times \frac{(zr)^n}{n!}\, {}_2F_1\left(b-n, 1-c+b+n; 1-a+b-n; \frac{1}{z}\right), \quad (16)
$$

$$
{}_r\tilde{F}(a,b;c;z) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)} \times
$$

$$
\times \Gamma(b-n)\Gamma(c-b-n) \frac{(-r)^n}{n!} \left[\frac{\Gamma(b-n-a)(1-z)^{-a}}{\Gamma(b-n)\Gamma(c-a-2n)} \times \right.
$$

$$
\times\, {}_2F_1\left(a, c-b-n; a-b+1+n; \frac{1}{1-z}\right) +
$$

$$
+ \frac{\Gamma(a-b+n)(1-z)^{n-b}}{\Gamma(a)\Gamma(c-b-n)} \times
$$

$$
\left. \times\, {}_2F_1\left(b-n, c-2n-a; b-a+1-n; \frac{1}{1-z}\right) \right], \quad (17)
$$

$$
{}_r\tilde{F}(a,b;c;z) =
$$

$$
= A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)} \Gamma(b-n)\Gamma(c-b-n) \frac{(-r)^n}{n!} \times
$$

$$
\times \left[\frac{\Gamma(c-a-b-n) z^{-a}}{\Gamma(c-a-2n)\Gamma(c-b-n)}\, {}_2F_1\left(a, 1+a-c+2n; \right.\right.
$$

$$
\left. a+b-c+1+n; 1-\frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(a+b-c+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b-n)} \times
$$

$$
\times (1-z)^{c-a-b-n} z^{a-c+2n}\, {}_2F_1\left(c-a-2n, 1-a; \right.
$$

$$
\left.\left. 1+c-a-b-n; 1-\frac{1}{z}\right)\right]. \quad (18)
$$

Лема 3 (*функціональні співвідношення для функції* ${}_r\tilde{F}(z)$). При умовах існування функції ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$ справедливі такі функціональні співвідношення:

$$
{}_r\tilde{F}(a,b;a+b+1-c;1-z) =
$$

$$
= z^{-a}\, {}_r\tilde{F}(a, a-c+1; a+b-c+1; 1-z^{-1}), \quad (19)
$$

$$
{}_r\tilde{F}(a+1-c, b+1-c; 2-c; z) =
$$

$$
= (1-z)^{c-a-1}\, {}_r\tilde{F}\left(a+1-c, 1-b; 2-c; \frac{z}{z-1}\right), \quad (20)
$$

$$
{}_r\tilde{F}(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z) =
$$

$$
= z^{a-c}\, {}_r\tilde{F}(c-a, 1-a; c+1-a-b; 1-z^{-1}), \quad (21)
$$

$$
(-z)^{-b}\, {}_r\tilde{F}(b+1-c, b; b+1-a; z^{-1}) = (-z)^{1-c} \times
$$

$$
\times (1-z)^{c-b-1}\, {}_r\tilde{F}(b+1-c, 1-a; b+1-a; (1-z)^{-1}), \quad (22)
$$

$$
(-z)^{-a}\, {}_r\tilde{F}(a, a+1-c; a+1-b; z^{-1}) =
$$

$$
= (1-z)^{-a}\, {}_r\tilde{F}(a, c-b; a-b+1; (1-z)^{-1}), \quad (23)
$$

$$
{}_r\tilde{F}(a+1,b;c;z) - {}_r\tilde{F}(a,b;c;z) =
$$

$$
= \frac{b}{c} z\, {}_r\tilde{F}(a+1, b+1; c+1; z), \quad (24)
$$

$$c\,{}_r\tilde{F}(a,b;c;z)-(c-b)\,{}_r\tilde{F}(a,b;c+1;z)=$$
$$b\,{}_r\tilde{F}(a,b+1;c+1;z). \quad (25)$$

Доведення. Доведемо, наприклад, формулу (23). Використаємо інтегральне зображення (1) для функції ${}_r\tilde{F}(a,a+1-c;a+1-b;z^{-1})$:

$${}_r\tilde{F}(a,a+1-c;a+1-b;z^{-1})=\frac{1}{\mathrm{B}(a+1-c,c-b)}\times$$
$$\times\int_0^1 t^{a-c}(1-t)^{c-b-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-a}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{\mathrm{B}(a+1-c,c-b)}\int_0^1(1-u)^{a-c}u^{c-b-1}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-a}\times$$
$$\times\left(1-\frac{u}{1-z}\right)^{-a}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{u(1-u)}\right)du=$$
$$=(-z)^a(1-z)^{-a}\,{}_r\tilde{F}(a,c-b;a-b+1;(1-z)^{-1}).$$

Інші співвідношення доводяться аналогічно.

Інтеграли з функцією ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$

Для обчислення інтегралів з r-узагальненою гіпергеометричною функцією Гаусса ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$ використовуються означення функції ${}_r\tilde{F}(z)$ (формула (1)), зображення функції ${}_r\tilde{F}(z)$ рядами, відповідні підстановки та нескладні перетворення.

Інтеграли з ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$, з степеневими та раціональними функціями:

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}\,{}_r\tilde{F}(a,b;c;-tx)dx=$$
$$=\frac{\mathrm{B}(\lambda,a-\lambda)}{\mathrm{B}(b,c-b)}t^{-\lambda}\,{}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_\alpha^\gamma(b-\lambda,c-b;r), \quad (26)$$

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}\,{}_r\tilde{F}(a,b;c;1-tx)dx=$$
$$=\frac{\mathrm{B}(\lambda,a-\lambda)}{\mathrm{B}(b,c-b)}t^{-\lambda}\,{}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_\alpha^\gamma(b-\lambda,c-a-b+\lambda;r), \quad (27)$$

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{\mu-1}\,{}_r\tilde{F}(a,b;c;-tx)dx=\frac{\Gamma(\mu)y^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(a)\mathrm{B}(b,c-b)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda+\mu+k)}\frac{(-ty)^k}{k!}\,{}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_\alpha^\gamma(b+k,c-b;r), \quad (28)$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{\lambda-1}}{(x+z)^\rho}\,{}_r\tilde{F}(a,b;c;-tx)dx=\frac{\mathrm{B}(\lambda,\rho-\lambda)\Gamma(\lambda-\rho+1)}{\mathrm{B}(b,c-b)\Gamma(a)\Gamma(\lambda)}\times$$
$$\times z^{\lambda-\rho}\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda-\rho+1+k)}\frac{(tz)^k}{k!}\,{}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_\alpha^\gamma(b+k,c-b;r)+$$
$$+\frac{\Gamma(\lambda-\rho)\Gamma(\rho-\lambda+1)}{\mathrm{B}(b,c-b)\Gamma(a)\Gamma(\rho)}t^{\rho-\lambda}\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(a-\lambda+\rho+k)\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho-\lambda+1+k)}\times$$
$$\times\frac{(tz)^k}{k!}\,{}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_\alpha^\gamma(b-\lambda+\rho+k,c-b;r). \quad (29)$$

Інтеграл з ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$ та показниковою функцією. Розглянемо

$$\int_0^\infty e^{-px}x^{\lambda-1}\,{}_r\tilde{F}(a,b;c;-tx)dx=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\mathrm{B}(b,c-b)\Gamma(a)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)}\left[\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(a-\lambda)\Gamma(b-n-\lambda)t^{-\lambda}}{\Gamma(c-\lambda-2n)}\Gamma(c-a-\right.$$
$$-b-n-\lambda)\,{}_2F_2\left(\lambda,c-a-b-\lambda-n;\lambda-a+1,\lambda-b+1;\right.$$
$$\left.-\frac{p}{t}\right)+\Gamma(a-b+n)\Gamma(b-n)\Gamma(\lambda-b+n)\frac{p^{b-n-\lambda}}{t^{b-n}}\times$$
$$\left.\times{}_2F_2\left(b-n,c-2n-a;b-n-a+1,b-n-\lambda+1;-\frac{p}{t}\right)\right]+$$
$$+\frac{\Gamma(\lambda-a)\Gamma(a-\lambda+1)}{\Gamma(a)\mathrm{B}(b,c-b)}\frac{p^{a-\lambda}}{t^a}\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(a+k)\left(\frac{p}{t}\right)^k}{\Gamma(a-\lambda+1+k)k!}\times$$
$$\times\,{}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_\alpha^\gamma(b-a-k,c-b+k;r). \quad (30)$$

Зауважимо, що при обчисленні вказаного вище інтеграла використовувалось зображення (τ,β)-узагальненої бета-функції вигляду (12) рядом:

$${}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_\alpha^\gamma(b,c-b;r)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)}\mathrm{B}(b-n,c-b-n)\frac{(-r)^n}{n!}. \quad (31)$$

Інтегральне рівняння з функцією ${}_r\tilde{\mathrm{P}}_\nu^{-\mu}\left(\dfrac{x}{t}\right)$ ***в ядрі.*** Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма I роду

$$\int_0^\infty (xt)^{\frac{\mu}{2}}(x^2-t^2)^{-\frac{\mu}{2}}\,{}_r\tilde{\mathrm{P}}_\nu^{-\mu}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{f(t)}{t}dt = g(x)\,, \quad (32)$$

де $x>0$; $\nu>-\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{2}(\mu+1)<\nu<\dfrac{1}{2}(\mu-1)$; $f(x)\in$ $\in L_2(0,\infty)$; $r>0$; $g(x)$ — відома функція; $f(x)$ — шукана функція; ${}_r\tilde{\mathrm{P}}_\nu^{-\mu}\left(\dfrac{x}{t}\right)$ — r-узагальнена приєднана функція Лежандра I роду:

$${}_r\tilde{\mathrm{P}}_\nu^{-\mu}\left(\frac{x}{t}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}{}_r\tilde{\tilde{F}}\left(-\nu,\nu+1;\mu+1;\frac{1-x}{2}\right), \quad (33)$$

де ${}_r\tilde{\tilde{F}}(\ldots)$ — функція, визначена формулою (3).

Інтегральне рівняння (32) перепишемо в операторному вигляді:

$$({}_r\tilde{\mathrm{P}}f)(x)=\mathrm{g}(x)\,, \quad (34)$$

де

$$({}_r\tilde{\mathrm{P}}f)(x)=\int_0^\infty (xt)^{\frac{\mu}{2}}(x^2-t^2)^{-\frac{\mu}{2}}\,{}_r\tilde{\mathrm{P}}_\nu^{-\mu}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{f(t)}{t}dt. \quad (35)$$

Для знаходження розв’язку рівняння (32) доведемо дві допоміжні леми.

Лема 4. Оператор

$$({}_r\mathrm{M}_{\alpha,\nu}^{\lambda}f)(x)=\int_0^\infty (xt)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,{}_r\mathrm{K}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda}(xt)f(t)dt, \quad (36)$$

де

$${}_r\mathrm{K}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\lambda}(xt)=\frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}x^{\frac{1}{2}-\nu}t^{\nu-\frac{1}{2}}\int_x^\infty e^{-t\xi}(\xi^2-x^2)^{\nu-1}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau}\left(\alpha;\gamma;\frac{-r(\xi+\lambda)^2}{(x+\lambda)(\xi-x)}\right)d\xi, \quad (37)$$

можна подати у формі

$${}_r\mathrm{M}_{\alpha,\nu}^{\lambda}f(x)=2^{-\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,{}_r\mathrm{I}_{\alpha-\nu,\nu}^{\lambda}\,\mathrm{T}_{\alpha+\nu}\,f(x), \quad (38)$$

де

$${}_r\mathrm{I}_{\eta,\delta}^{\lambda}f(x)=\frac{2}{\Gamma(\delta)}x^{\eta}\int_x^\infty (t^2-x^2)^{\delta-1}t^{-\eta-2\delta+1}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau}\left(\alpha;\gamma;\frac{-r(t+\lambda)^2}{(x+\lambda)(t-x)}\right)f(t)dt; \quad (39)$$

$$\mathrm{T}_{\alpha}f(x)=\int_0^\infty (xt)^{\alpha-1}e^{-xt}f(t)dt\,; \quad (40)$$

${}_1\Phi_1^{\tau}(\ldots)$ — τ-узагальнена вироджена (конфлюентна) гіпергеометрична функція (4).

Д о в е д е н н я. Використовуючи (36), (37), (4), законність перестановки порядків інтегрування (виконуються умови теореми 18 із [14, с. 413]), дістанемо

$${}_r\mathrm{M}_{\delta,\nu}^{\lambda}f(x)=\int_0^\infty (xt)^{\delta-\frac{1}{2}}f(t)\frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}x^{\frac{1}{2}-\nu}t^{\nu-\frac{1}{2}}dt\times$$

$$\times\int_x^\infty e^{-t\xi}(\xi^2-x^2)^{\nu-1}\,{}_1\Phi_1^{\tau}\left(\alpha;\gamma;\frac{-r(\xi+\lambda)^2}{(x+\lambda)(\xi-x)}\right)d\xi=$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}x^{\delta-\nu}\int_x^\infty \xi^{1-\nu-\delta}(\xi^2-x^2)^{\nu-1}\mathrm{T}_{\delta+\nu}f(\xi)\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau}\left(\alpha;\gamma;\frac{-r(\xi+\lambda)^2}{(x+\lambda)(\xi-x)}\right)d\xi=$$

$$=2^{-\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,{}_r\mathrm{I}_{\delta-\nu,\nu}^{\lambda}\mathrm{T}_{\delta+\nu}f(x)\,.$$

Лема 5. При виконанні умов існування інтеграла (32) справедлива така композиційна формула для (35):

$$({}_r\tilde{\mathrm{P}}f)(x)=C_1\mathrm{T}_{\frac{\mu}{2}+1}\,{}_r\mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-\nu-1,\nu+1}^{\lambda}\,\mathrm{T}_{\frac{\mu}{2}+\nu+1}f(x)\,, \quad (41)$$

де ${}_r\mathrm{I}_{\eta,\delta}^{\lambda}$, $\mathrm{T}_{\frac{\mu}{2}+\nu+1}$ визначаються відповідно формулами (39), (40);

$$C_1=2^{-\nu-1}\Gamma^{-1}(\mu-\nu)\Gamma^{-1}(\mu+\nu+1)\,. \quad (42)$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи цікаве співвідношення для ${}_r\mathrm{M}_{\alpha,\nu}^{\lambda}$ (у випадку $\lambda=y$)

$${}_r\mathrm{M}_{\frac{\mu}{2},\nu+1}^{y}\left(y^{\frac{\mu}{2}}e^{-xy},y\to x\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\mu+\nu+1)y^{\frac{\mu}{2}-1}(x^2-y^2)^{-\frac{\mu}{2}}{}_r\tilde{\mathrm{P}}_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right), \quad (43)$$

справедливість якого легко перевіряється безпосередньо, розглядаємо дію оператора $\mathrm{T}_{\frac{\mu}{2}+1}$ на ${}_r\mathrm{M}^{y}_{\frac{\mu}{2},\nu+1}$ і згідно з (38) переконуємось у справедливості (41).

Повертаємось до розв'язання інтегрального рівняння (32). Справедлива така теорема.

Теорема. При умовах $x>0$, $r>0$, $\nu>-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}(\mu+1)<\nu<\frac{1}{2}(\mu-1)$, $f(x)\in L_2(0,\infty)$ розв'язок інтегрального рівняння (32) має вигляд

$$f(x)=C_2\cdot 2^{1-\nu}\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\mu+\nu+1)\times$$

$$\times\mathrm{T}^{-1}_{\frac{\mu}{2}+\nu+1}\mathrm{M}^{-1}\left\{\int_0^\infty t^{1-\delta-\eta-\frac{s}{2}}\times\right.$$

$$\times\mathrm{M}\left\{\left(\frac{1}{(t+y)^s}\mathrm{M}\left\{{}_r\mathrm{I}^{\lambda}_{\eta,\delta}\mathrm{T}^{-1}_{\frac{\mu}{2}+1}f,s\right\},p\right)\right\}dt,$$

$$\left.p-\eta-\frac{3s}{2}-\delta\right\}, \quad (44)$$

де M — інтегральний оператор Мелліна; M^{-1} — обернений оператор Мелліна [15]; T^{-1} — обернений оператор від (40);

$$C_2=\frac{(-1)^s\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-s\tau)\Gamma(2s)}{\Gamma(s)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-s\tau)\Gamma(p)\Gamma(2s-p)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\delta\right)\Gamma\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{\Gamma(\delta+s)\Gamma\left(1-\delta-\frac{s}{2}\right)2^{\delta}\sqrt{\pi}}.$$

Д о в е д е н н я. Застосовуючи перетворення Мелліна та відому формулу [16]

$$\int_0^t x^{1-\delta-\frac{s}{2}}(x+t)^{\delta-1}(t-x)^{\delta+s-1}dx=$$

$$=\frac{t^{\delta+\frac{s}{2}-1}\Gamma(\delta+s)\Gamma\left(1-\delta-\frac{s}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\delta\right)\Gamma\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}2^{\delta-1}, \quad (45)$$

після перетворень знаходимо обернений оператор для (39). Після перетворень та інтегрування по x одержимо

$$\int_0^\infty t^{p-\eta-\frac{3s}{2}-\delta-1}f(t)dt=$$

$$=C_2\int_0^\infty t^{1-\delta-\eta-\frac{3s}{2}}\mathrm{M}\left\{\frac{1}{(t+\lambda)^s}\mathrm{M}\{{}_r\mathrm{I}^{\lambda}_{\eta,\delta},s\},p\right\}dt, \quad (46)$$

звідки маємо

$$f(x)=C_2 2^{1-\nu}\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\mu+\nu+1)\mathrm{M}^{-1}\left\{\int_0^\infty t^{1-\delta-\eta-\frac{s}{2}}\times\right.$$

$$\times\mathrm{M}\left\{\left(\frac{1}{(t+y)^s}\mathrm{M}\{{}_r\mathrm{I}^{\lambda}_{\eta,\delta}f,s\},p\right)\right\}dt,$$

$$\left.p-\eta-\frac{3s}{2}-\delta\right\}, \quad (47)$$

а врахувавши вигляд T^{-1}_{α}, одержимо (44).

Висновки

Нове узагальнення гіпергеометричної функції Гаусса дало змогу обчислити велику низку інтегралів, яких немає в наявній науковій та довідковій літературі. Властивості *r*-узагальненої гіпергеометричної функції ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$ дозволили запровадити *r*-узагальнену функцію Лежандра І роду та розв'язати в замкненій формі інтегральне рівняння з цією функцією.

Враховуючи перспективність одержаних наукових результатів, плануємо в майбутньому значно збільшити кількість обчислених інтегралів з функцією ${}_r\tilde{F}(a,b;c;z)$, розширити область їх практичного застосування.

Н.А. Вирченко, О.Н. Лисецкая

НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С r-ОБОБЩЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА

Исследованы основные свойства r-обобщенной гипергеометрической функции Гаусса, даны их применения к вычислению новых интегралов. Решено интегральное уравнение Фредгольма I рода с r-обобщенной присоединенной функцией Лежандра I рода в ядре.

N.O. Virchenko, O.M. Lisetska

NEW INTEGRALS WITH THE r-GENERALIZED GAUSS HYPERGEOMETRIC FUNCTION

We study the basic properties of the r-generalized Gauss hypergeometric function and propose using them to calculate new integrals. We solve the Fredholm integral equation of the first kind with the r-generalized associated Legendre function of the first kind in the kernel.

1. *Gauβ C.F.* Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reine $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$ unsw mit Einschluss der nachgelas // Fortsetzung übersetzt von H. Simon B. – 1887. – I-V. – S. 1–86.
2. *Kummer E.E.* Über die hypergtometrische Reine $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$// J. für M. – 1835. – **15.** – S. 39–83; 127–172.
3. *Riemann B.* Beitragezur zur Theorie der durch die Gaubsche Reihe $F(\alpha,\beta;\lambda;x)$ darstellbaren Funktionen. – Gött // Abh. 185 s.
4. *Wright E.M.* On the coefficient of power series having exponential singularities // T. Lond. Math. Soc. – 1933. – N 8. – P. 71–79.
5. *Wright E.M.* On asymptotic expansions of generalized Bessel function // Pros. Lond. Math. Soc. – 1935. – **38.** – P. 257–270.
6. *Kilbas A.A., Saigo M.* *H*-Transforms. – Chapman and Hall / CRC, 2004. – 390 p.
7. *Chaudhry M.A., Zubair S.M.* On a class of incomplete gamma functions with applications. – Chapman and Hall / CRC, 2000. – 494 p.
8. *Virchenko N., Kalla S.L., Al-Zamel A.* Some results on a generalized hypergeometric function // Integr. and Special Functions. – 2001. – **12**, N 1. – P. 89–100.
9. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. "Fract. Calculus and Appl. Anal." – 2006. – **9**, N 2. – P. 101–108.
10. *Вірченко Н.О.* Узагальнені спеціальні функції та їх застосування // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2006. – № 4. – С. 42–49.
11. *Вирченко Н.А.* О некоторых обобщениях функций гипергеометрического типа и их применении // Матер. междунар. науч.-техн. конф. БНТУ. – Минск, 2009. – С. 14.
12. *Вірченко Н.О., Лисецька О.М., Овчаренко О.В.* До теорії узагальнених функцій гіпергеометричного типу та їх застосування // Доп. НАН України. – 2009. – № 5. – С. 7–15.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
14. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ. – К.: Факт, 2004. – 560 с.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. – Т. 1. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
12 червня 2009 року